Pertemuan ke – 4

Non-Linier Equation

Non-Linier Equation

- Persamaan Kuadrat
- Persamaan Kubik
- Metode Biseksi
- Metode Newton-Rapshon
- Metode Secant

Persamaan Kuadrat

- Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah 2.
- Bentuk umum persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$

  dengan $a,b,c \in R$ di mana R adalah himpunan bilangan real dan $a \neq 0$.
- Contoh :

  $x^2 - 4 = 0$,

  $x^2 - 9x = 0$,

  $x^2 + 7x = 10$ dan lain sebagainya.

Penyelesaian Persamaan Kuadrat

- Nilai pengganti x yang memenuhi persamaan kuadrat

  $ax^2 + bx + c = 0$ disebut penyelesaian persamaan kuadrat.
- Beberapa cara untuk menyelesaikan (mencari akar-akar) persamaan kuadrat :
  1. Memfaktorkan
  2. Melengkapkan kuadrat sempurna
  3. Menggunakan rumus kuadrat (rumus abc)

Memfaktorkan

- Sebelum akan dibahas mengenai aturan faktor nol.
- Aturan faktor nol menyatakan bahwa hasil kali sebarang bilangan dengan bilangan nol adalah nol.

  Misalkan $2 \times 0 = 0$, $0 \times 9 = 0$ atau $0 \times 0 = 0$.
- Jadi jika hasil kali dua bilangan sama dengan nol maka salah satu atau kedua bilangan tersebut adalah nol.
- Secara simbolik dinyatakan bahwa

  jika $ab = 0$ *maka* $a = 0$ *atau* $b = 0$.
- *Kata atau pada* " $a = 0$ *atau* $b = 0$ " berarti bahwa salah satu dari *a atau b sama dengan nol atau bisa jadi kedua-duanya* sama dengan nol.

- Dengan menggunakan aturan faktor nol, tentukanlah penyelesaian persamaan kuadrat berikut ini.

  a. $4x^2 - 32x = 0$

  b. $7x^2 = -84x$

  c.

  d. $x^2 + 5x + 6 = 0$

- Persamaan kuadrat $4x2 - 32x = 0$
  dapat diubah menjadi $4x(x - 8) = 0$
  dengan menggunakan aturan distributif.
- Selanjutnya dengan menggunakan aturan faktor nol akan diperoleh
  $4x = 0$ atau $x - 8 = 0$
- Sehingga diperoleh $x = 0$ *atau* $x = 8$.
- Jadi penyelesaian persamaan kuadrat $4x^2 - 32x = 0$
  adalah $x = 0$ atau $x = 8$

Melengkapkan Kuadrat Sempurna

- Ubahlah persamaan kuadrat semula dalam bentuk
  $(x + p)^2 = q$, dengan $q \geq 0$
- Tentukan akar-akar persamaan kuadrat itu sesuai dengan bentuk persamaan yang terakhir.

- $(x + p) = \pm\sqrt{q}$, atau $x = -p \pm\sqrt{q}$

- Tentukan nilai x dari persamaan $x^2 - 2x - 2 = 0$
- Penyelesaian :
- $x^2 - 2x + 1 + (-1) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{3}$ atau $x - 1 = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{3}$ atau $x = 1 - \sqrt{3}$

- jadi HP = $\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$

- Tentukan nilai x dari persamaan $x^2 - 2x - 2 = 0$
- Penyelesaian :
- $x^2 - 2x = 2$ $\qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 + 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{3}$ atau $x - 1 = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{3}$ atau $x = 1 - \sqrt{3}$

- jadi HP = $\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$

Rumus abc (Al-khawarizmi)

- Untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat ax^2 + bx + c = 0 adalah dengan menggunakan rumus kuadrat atau sering disebut rumus abc.
- Rumus persamaan kuadrat dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut : (cobalah melengkapi)
- $ax^2 + bx + c = 0$

$\Leftrightarrow$ $ax^2 + bx = - c$

$\vdots$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Rumus abc (Al-khawarizmi)

- **Jika $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b,c $\in$ R, a $\neq$0**
- **Maka** $x_{12} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Persamaan Kubik

Persamaan Kubik: suatu fungsi yang memiliki bentuk $f(x) = ax^3+ax^2+cx+d$

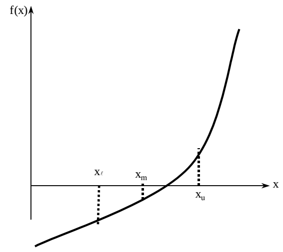
di mana *a* bernilai tidak nol; atau dengan kata lain merupakan suatu polinomial orde tiga. Turunan dari suatu fungsi kubik adalah suatu fungsi kuadrat. Integral dari suatu fungsi kubik adalah fungsi pangkat empat (kuartik).

Metode Biseksi

- **Metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung dan bagian yang tdk mengandung akar dibuang.Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.**
- **Untukmenggunakanmetodebiseksi, tentukanbatasbawah(*a) danbatasatas(b).Kemudiandihitungnilaitengah: x =***
- ***Dari nilai x ini perlu dilakukan pengecekan keberadaan akar :f(a) . f(b) < 0, maka b=x, f(b)=f(x), a tetapf(a) . f(b) > 0, maka a=x, f(a)=f(x), b tetap***
- ***Setelah diketahui dibagian mana terdapat akar, maka batas bawah & batas atas di perbaharui sesuai dengan range dari bagian yg mempunyai akar.***

Algoritma Biseksi

1. Definisikan fungsi *f(x)yang akan dicari akarnya*
2. *Tentukan nilai* x_l *dan* x_u
3. *Asumsikan akar* x_m pada persamaan *f(x)=0* sebagai titik tengah antara x_l *dan* x_u sebagai : $x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2}$



Kemudian periksa :

a) Jika $f(x_l)f(x_m) < 0$, maka letak akar berada diantara x_l dan x_m ; sehingga didapat $x_l = x_l$; $x_u = x_m$.
b) Jika $f(x_l)f(x_m) > 0$,Maka letak akar berada diantara x_m dan x_u; sehingga didapat $x_l = x_m$; $x_u = x_u$.
c) Jika $f(x_l)f(x_m) = 0$; Sehingga didapat akar x_m .Jika nilainya benar maka hentikan proses perhitungan algoritma.

Tentukan perkiraan baru dari akar

$$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2}$$

Tentukan absolute relative approximate error

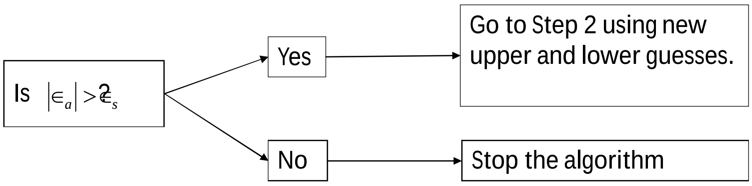
$$|\in_a| = \left| \frac{x_m^{new} - x_m^{old}}{x_m^{new}} \right| \times 100$$

Dimana,

$$x_m^{old} = \text{previous estimate of root}$$

$$x_m^{new} = \text{current estimate of root}$$

Bandingkan absolute relative approximate error $|\in_a|$ dengan pre-specified error tolerance $\in_s$.



Note one should also check whether the number of iterations is more than the maximum number of iterations allowed. If so, one needs to terminate the algorithm and notify the user about it.

KEUNTUNGAN BISEKSI

- Selalu berhasil menemukan akar (solusi) yang dicari, atau dengan kata lain **selalu konvergen**.

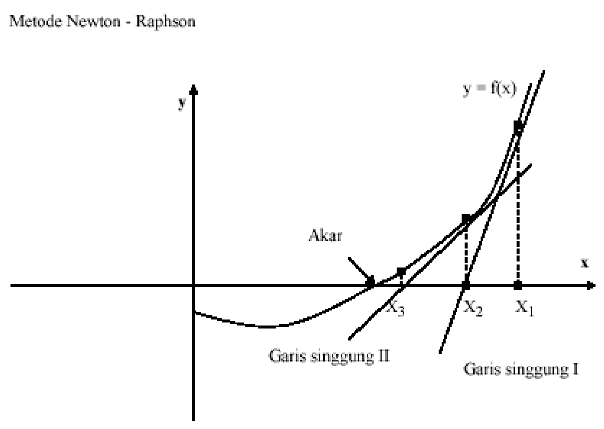
KELEMAHAN BISEKSI

- Bekerja **sangat lambat**. Tidak memandang bahwa sebenarnya akar atau solusi yang dicari telah berada dekat sekali dengan X_0 ataupun X_1.

METODE NEWTON-RAPHSON

- Waktu pencarian akarnya relatif lebih cepat dibandingkan metode lainnya.
- Memanfaatkan turunan fungsi f(x) pada suatu titik P [x_1, f(x_1)]
- Membuat garis singgung pada titik P tsb yg memotong sumbu x → didapat x_{i+1}
- Sampai ditemukan akarnya (sesuai batas toleransi/error yg diberikan)

Gambar Grafik



METODE NEWTON-RAPHSON *(lanjutan)*

- Persamaan garis singgung melalui P [X_1, f(X_1)] adalah:
  $y - f(X_1) = f'(X_1) \cdot (X - X_1)$
  dgn f '(X_1) : gradien garis singgung
- Persamaan tsb memotong sumbun x di titik (X_2, 0) maka akan diperoleh:

$$0 - f(X_1) = f'(X_1).\ (X_2 - X_1)$$

$$X_2 .f'(X_1) - X_1.f'(X_1) = - f'(X_1)$$

$$X_2 = X_1 - f(X_1)/\ f'(X_1)$$

METODE NEWTON-RAPHSON *(lanjutan)*

- Secara Rekurens, persamaan tsb dinyatakan menjadi:

$$X_{i+1} = X_i - f(X_1)/\ f'(X_1)$$

Utk i = 1, 2, 3, ...

f'(X_i): turunan pertama f(X) pada x = x_i.

Metode Sekan

- Disebut juga Metode Interpolasi Linear
- Dalam prosesnya tidak dilakukan penjepitan akar atau dpl.

  $[X_0, X_1]$ tidak harus mengandung akar yang akan dicari.
- Sehingga $f(x_0)$ dan $f(x_1)$ bisa bertanda sama
- Untuk mencari X_2 , sama dengan metode REGULA FALSI

Metode Sekan *(lanjutan)*

- Untuk iterasi berikutnya akan diperoleh interval baru $[X_0, X_1]$ dengan cara pergeseran: $X_0 \leftarrow X_1$, $X_1 \leftarrow X_2$
- Iterasi berlangsung sampai batas maksimum (Max.) atau sampai dipenuhinya batas Toleransi (T):

$$\underbrace{| (X_1 - X_2)/ X_1 |}_{\text{Nilai kesalahan relatif}} \leq T$$

Metode Sekan *(lanjutan)*

- Proses Pencapaian Akar (Mtd. SEKAN)
- Tambah gambar ! (halaman akhir)

Algoritma Sekan

- INPUT X_0, X_1, T, Max, F(x)
- i = 0
- Found = false
- REPEAT

  i = i + 1

  $X_2 = X_1 - (X_1 - X_0)*F(X_1)/(F(X_1) - F(X_0))$

  $X_0 = X_1$

  $X_1 = X_2$

Algoritma Sekan (*lanjutan*)

IF $| (X_0 - X_1) / X_0 | \leq T$ OR

i = Max THEN

Found = true

ENDIF

- UNTIL (Found = true)
- OUTPUT (X_2)